УДК 514.984

О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Джабраилова А.Н.

ON MULTIPLE COMPLETENESS OF A SYSTEM OF EIGEN AND ADJOINT ELEMENTS OF OPERATOR SHEAF IN HILBERT SPACES

Аннотация. В работе определяются условия кратной полноты собственных и присоединенных элементов операторного пучка квадратично зависящего от спектрального параметра в гильбертовом пространстве.

Abstract. In this paper the conditions of the existence of multiple completeness of a system of eigen and adjoint elements of operator sheaf quadratically depending on the spectral parameter in Hilbert space is given.

Ключевые слова: спектральная теория, оператор, пространство, собственный элемент.

Keywords: Spectral theory, operator, space, eigen element.

Начало спектральной теории операторных пучков было положено в работе М.В. Келдыша [1], в которой было дано понятие кратной полноты системы собственных и присоединенных векторов полиномиального операторного пучка и доказана фундаментальная теорема о кратной полноте этих систем для некоторых классов операторных пучков.

В дальнейшем теория М.В. Келдыша была обобщена в различных направлениях (в частности, в работах [2], [3]).

Установлению кратной полноты с.п. векторов некоторых полиноминальных операторных пучков посвящены работы [4]- [9].

Вопросы кратной полноты собственных и присоединенных элементов многопараметрических систем операторов рассматривались в работах [10]- [14].

Объектом изучения этой работы является полиноминальный операторный пучок с ограниченными коэффициентами вида:

$$A(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \lambda^j A_j, \tag{1}$$

где $A_j (j = 0,1,\dots,n) -$ некоторые линейные операторы, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H, а λ -комплексный параметр.

Приведем некоторые определения из вышеуказанной работы [1].

Положим $L(\lambda) = E - A(\lambda)$.

Определение 1. Число λ_0 называется собственным элементом операторного пучка $L(\lambda)$, если существует ненулевой вектор $\phi_0 \in H$ такой, что выполняется равенство

$$L(\lambda_0)\phi_0 = 0.$$

При этом ϕ_0 называется собственным вектором пучка $L(\lambda)$, отвечающим собственному элементу λ_0. Если $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{p=0}^{j} \frac{1}{p!} L^{(p)}(\lambda_0)\phi_{j-p} = 0 (j = 1,2,\dots,k),$$

то их называют цепочкой векторов, присоединенных к собственному вектору ϕ_0 пучка $L(\lambda)$.

Пусть ϕ_0-собственный вектор пучка $L(\lambda)$, отвечающий собственному значению λ_0, а $\phi_1, \dots, \phi_k -$ соответствующие присоединённые элементы, которые определяют присоединенную цепочку элементов. Определим элементы $\tilde{\phi}_s \in H^n$, где H^n есть прямая сумма $n -$ копий пространств H, следующим образом:

$$\tilde{\phi}_s = \left(\phi_s^{(0)}, \phi_s^{(1)}, \dots, \phi_s^{(n-1)}\right),$$

при этом $\phi_0^{(0)} = \phi_0, \rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\ \phi_s(0) = \phi_s(s = 1,\dots,k),$

а

$$\phi_i^{(0)} = \lambda_0^{\nu}\phi_0^{(0)} = \lambda_0^{\nu}\phi_0,$$
$$\phi_s^{\nu} = \lambda_s\phi_s^{(\nu-1)} + \phi_{s-1}^{(\nu-1)}, (\nu = 1, \dots., k).$$

Определим 2. Система собственных и присоединённых векторов называется $n-$ кратно полной в H, если система $\tilde{\phi}_s$, построенная для всех собственных значений полна в H^n.

В 1977 году Р.М. Джабарзаде в работе [3] были рассмотрены вопросы полноты системы собственных и присоединенных элементов операторов, квадратично зависящих от спектрального параметра. Была доказана

Теорема 1 (Р.М. Джабарзаде). Пусть C-полный самосопряжённый оператор конечного порядка ρ, действующий в гильбертовом пространстве H; $A, B -$ вполне непрерывные операторы в H, причем B имеет вид:

$$B = B_1 C^{1/2} + C_1, (2)$$

где B_1 -вполне непрерывный оператор, а $C_1 -$ самосопряженный оператор конечного порядка ρ_1. Тогда система собственных присоединенных элементов оператора

$$A + \lambda B + \lambda^2 C \tag{3}$$

двукратно полна в гильбертовом пространстве H .

Ниже доказывается теорема о кратной полноте по М.В.Келдышу с.п. элементов операторного пучка второго порядка, которая обобщает приведенную теорему Р.М. Джабарзаде [3].

Теорема 2. Пусть выполняются условия:

а) C и C_1-нормальные вполне непрерывные операторы, которые удовлетворяют условиям $C \in \sigma_{\rho_1}$, $C_1 \in \sigma_{\rho_2}$, где $0 < \rho_1 < \infty$ $0 < \rho_2 < \infty$, и собственные значения каждого из них лежат на конечном числе лучей , причем $KerC = \{0\}$;

б) A и $B_1 -$ вполне непрерывные операторы;

в) $CC_1 = C_1C$ и $CC_1^* = C^*C_1$.

Тогда имеет место двукратная полнота системы собственных присоединенных элементов операторного пучка

$$L(\lambda) = A + \lambda B_1 C + \lambda C_1 + \lambda^2 C^2. \tag{4}$$

Доказательство теоремы 2. Как и при доказательстве теоремы 1 Дж. Э. Аллахвердиева из работы [2] рассмотрим в пространстве $H^2 = H \oplus H$ пучок:

$$L(\lambda) = \tilde{A} + \lambda\tilde{B} \tag{5}$$

и соответствующее уравнение в H^2:

$$(\tilde{A} + \lambda\tilde{B})\tilde{x} = \tilde{x}, \tag{6}$$

где

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & B_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} C_1 & C \\ C & 0 \end{pmatrix}, \rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\ \tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Оператор $\tilde{B}$ нормален, поскольку

$$\begin{pmatrix} C_1 & C \\ C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1^* & C^* \\ C^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CC_1^* + CC^* & C_1C^* \\ CC_1^* & CC^* \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} C_1^*C_1 + C^*C & C_1^*C \\ C^*C_1 & C^*C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C^* \\ C^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & C \\ C & 0 \end{pmatrix},$$

то есть $\tilde{B}\tilde{B}^* = \tilde{B}^*\tilde{B}$.

Собственные значения оператора $\begin{pmatrix} C_1 & C \\ C & 0 \end{pmatrix}$ расположены на конечном числе лучей.

Покажем, что собственные значения оператора $\begin{pmatrix} C_1 & C \\ C & 0 \end{pmatrix}$ совпадают со спектром пучка

$$L_1(\lambda) = -\lambda^2 E + C^2 + \lambda C_1.$$

Для этого сначала покажем, что нуль не может быть собственным значением оператора $\begin{pmatrix} C_1 & C \\ C & 0 \end{pmatrix}$. Действительно,

$$\begin{pmatrix} C_1 & C \\ C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_1 x + Cy = 0 \\ Cx = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 (KerC = \{0\}) \Rightarrow Cy = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Пусть теперь $\lambda \neq 0$ собственное значение оператора $\begin{pmatrix} C_1 & C \\ C & 0 \end{pmatrix}$. Тогда существует собственный элемент (x, y) такой, что

$$\begin{pmatrix} C_1 & C \\ C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Это означает, что

$$\begin{cases} C_1 x + Cy = \lambda x \\ Cx = \lambda y \end{cases} \tag{7}$$

Умножив первое уравнение системы (7) на λ, и подействовав на второе уравнение (7) оператором C, после их сложения получим:

$$(\lambda C_1 + C^2 - \lambda^2 E)x = 0,$$

то есть

$$L_1(\lambda)x = 0.$$

Обратно, если

$$(\lambda C_1 + C^2 - \lambda^2 E)x = 0,$$

то после замены

$$Cx = \lambda y$$

получаем уравнение:

$$\begin{cases} \lambda(C_1 x + Cy) = \lambda^2 x \\ Cx = \lambda y. \end{cases}$$

Так как собственные значения $L(\lambda)$ отличны от нуля , то будем отсюда иметь:

$$\begin{cases} C_1 x + Cy = \lambda x \\ Cx = \lambda y. \end{cases}$$

Из теории нормальных операторов вытекает, что собственные значения пучка $L_1(\lambda)$ расположены на конечном числе лучей.

Из вышесказанного следует, что собственные значения оператора $\tilde{B}$ находятся на конечном числе лучей, выходящих из начала координат.

Учитывая и то, что оператор $\tilde{A}$ вполне непрерывен в силу условия б) доказываемой теоремы 2, мы можем применить теорему 1 Дж.Э. Аллахвердиева из работы [2] к уравнению (6). Следовательно, имеет место полнота системы собственных присоединенных элементов уравнения (6) в пространстве H^2.

Доказательство двукратной полноты системы собственных присоединенных элементов пучка (4) в пространстве H проводится аналогично доказательству теоремы 1 из работы [3] Р.М. Джабарзаде.

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

елдыш М.В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. ДАН СССР, т.77, №1, 1951, стр.11-14.

ллахвердиев Дж.Э. О полноте системы собственных и присоединенных элементов несамосопряженных операторов близких к нормальным. ДАН СССР, т.115, №2, 1957, стр.207-210.

жабарзаде Р.М. О полноте системы собственных и присоединенных элементов операторов, квадратично зависящих от спектрального параметра. Изв.АН Аз. ССР, №1, 1977, стр.41-45.

4. Jabrailova A.N. Multiple completeness of eigen and adjoint vector *s* system of some classes of polynomial pencils. Proc. of IMM of NASA, 2000, v. 12, p.61-66.

5. Jabrailova A.N. On multiple completeness of a system of eigen and adjoint elements of operator sheaf in Hilbert spaces. Proc. of IMM of NASA, 2001, v. 15(23), p.94-99.

6. Jabrailova A.N. M.V.Keldysh multiple completeness of a system of root vectors of the higher order operator bundle. Transc. of NASA, 2004, v.24(1), p.143-148.

7. Jabrailova A.N. On fourfold completeness of root vectors of one class of fourth order operator bundles depending on parameters. Transc. of NASA, 2004, v.24(7), p.81-86.

жабраилова А.Н. О двукратной полноте корневых векторов одного класса операторных пучков второго порядка зависящих от параметров. Baki Dövlət Universitetinin Xəbərləri 2004, №1, seh. 56-62.

9. Jabrailova A.N. On double completeness of part of root vectors of a class of polynomial operator bundles of the fourth order. Transc. of NASA, 2005, v.25(7), p.55-60.

10. Jabrailova A.N. On spectral theory of two parametrical system. Transc. of NASA, 1998, v.28(3-4), p.64-66.

11. Dzhabarzadeh Rakhshanda, Jabrailova Afet. Multiparameter system of operators with two parameters in finite dimensional spaces. Pure and Applied Mathematical Journal, 2015, v. 4(4-1), p.1-4.

12. Dzhabarzadeh Rakhshanda, Jabrailova Afet. Spectral problems of multiparameter system of operators with two parameters. Open Science Journal of Mathe

жабарзаде Р.М., Джабраилова А.Н. О разложении со скобками по собственным и присоединенным векторам многопараметрической системы операторов в гильбертовом пространстве. Евразийское Научное Объединение, 2016, том 4(16), стр. 1-4.

жабарзаде Р.М. , Джабраилова А.Н. Кратная полнота собственных и присоединенных векторов двупараметрической системы операторов в гильбертовых пространствах. Евразийский Союз Ученых, 2017, 4(37), стр. 71-74.